

基于起臂工况的等截面吊臂腰绳设计分析

余镇海

浙江省建设工程机械集团有限公司, 浙江 杭州 310000

摘要 : 针对动臂起重设备大臂长吊臂起臂工况的腰绳设计, 在确定了吊臂上腰绳安装位置及形式后, 以腰绳长度为设计参数, 建立考虑二阶效应的吊臂系统非线性模型, 列非线性方程, 求出安装腰绳处挠度, 进而得出腰绳及拉板中的内力, 得到吊臂整体挠曲方程, 分析挠曲方程导数变化规律, 判定吊臂弯曲变形方向即该腰绳长度下吊臂是否出现 S 型反弯; 选取实例分析计算, 发现腰绳长度过小时吊臂弯曲方向改变即产生反弯, 用有限元软件分析观察吊臂上弯矩的变化情况为先增大后减小再增大而后再减小, 腰绳安装位置附近弯矩大幅减小, 腰绳长度过小时造成其反向即吊臂 S 型反弯, 对比有限元软件分析结果与本方法计算分析结果一致。

关键词 : 腰绳; 等截面; 起臂工况; 二阶理论; 非线性; 反弯

Design and Analysis of the Waist Rope of Constant Section Boom Based on the Working Condition of Boom

She Zhenhai

China Coal Construction Engineering Group Co., Ltd., Zhejiang 310000

Abstract : Aiming at the waist rope design for the boom lifting condition of the large boom lifting equipment, after determining the installation position and form of the waist rope on the boom, we take the length of the waist rope as the design parameter, establish a nonlinear model of the boom system considering the second-order effect, list the nonlinear equations, find out the deflection at the installation of the waist rope, and then derive the internal force in the waist rope and the pulling plate, obtain the overall deflection equation of the boom and analyze the change rule of the deflection equation derivative, determine the direction of bending deformation, i.e., whether there is an S-type deflection in the boom under the length of the waist rope. An example is selected to analyze and calculate, and it is found that when the waist rope length is too long, the bending direction of the sling changes, resulting in reverse bending. Using finite element software analysis, the bending moment on the boom was observed to increase first, then decrease, then increase and then decrease. The bending moment near the installation position of the waist rope was significantly reduced. When the length of the waist rope was too small, the reverse, that is, the S-shaped reverse bending of the boom, was caused. The result of finite element software analysis is consistent with that of this method.

Key words : waist rope; equal cross-section; boom condition; second-order theory; nonlinear; anti-bend

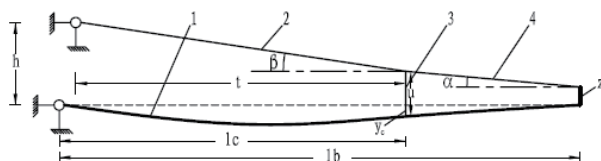
一、引言

腰绳装置是动臂式起重大臂长吊臂上的一种辅助结构, 国内对它的设计方法研究较少, 目前基本是用有限元法分析然后优化设计的方法, 想要在设计中得到较优的结果, 需要进行大量的有限元计算及结果分析比较工作, 即试凑法。对于一个臂长下的腰绳设计就需要不断的建立有限元模型, 分析计算结果, 选择出受力和变形结果都比较合理的模型, 再选用该模型上腰绳的长度。设计各个臂长下的腰绳长度, 需要建立大量的有限元模型, 花费大量的时间和精力。腰绳长度设计不合理, 会对整个吊臂受力产生负作用, 导致吊臂的 S 型变形甚至损坏的严重后果。本文对不带超起桅杆的动臂起重设备起臂工况下的大臂长吊臂进行简化, 在确定腰绳在吊臂上的安装位置的前提下, 建立力学模型, 并对其受力分析建立非线性微分方程, 求解加入腰绳后吊臂

的挠度曲线方程及吊臂的受力情况, 最终根据吊臂的受力和变形确定腰绳的长度。

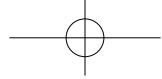
二、模型建立分析

对起臂时吊臂抬起瞬间的受力进行分析, 腰绳初始安装角度



1、大臂长吊臂 2、前拉板 3、腰绳装置 4、后拉板

> 图1 大臂长吊臂起臂时的简化力学模型

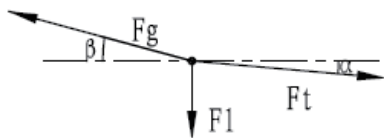


垂直于吊臂，起臂过程中施加拉力变形后，腰绳的上、下连接点的水平位移很小可忽略不计，吊臂的变形使腰绳装置产生向下的位移。外部边界条件：吊臂根部铰接在起重机上回转支座，上支座铰点位置固定；吊臂起臂时，桅杆与拉板连接的铰点基本不发生位移，只是拉板内部拉力在逐渐增大，直至增大到吊臂端部抬起，可以把桅杆与拉板连接的铰点位置看作固定。对变形后的大臂长吊臂建立力学模型。力学模型见图1， y_c 表示腰绳因吊臂变形而产生的整体向下位移， z 表示吊臂端部连接拉板的铰点偏移吊臂轴线的距离。

前拉板内部轴力 F_g 、后拉板内部轴力 F_t 与腰绳受到的拉力 F_l 的关系见图2，为：

$$F_g \cdot \cos \beta = F_l \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

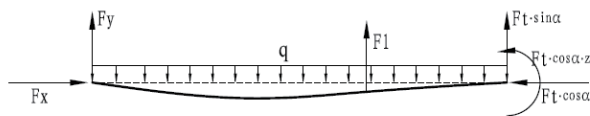
$$F_g \cdot \sin \beta = F_l \cdot \sin \alpha + F_l \quad (2)$$



> 图2 腰绳与前、后拉板铰接点的受力

从图1吊臂扳起瞬间吊臂力矩平衡可列出前拉板轴力的计算公式：

$$F_g \cdot \cos \beta \cdot (u - y_c) + F_g \cdot \sin \beta \cdot t = \frac{1}{2} q l_b^2 \quad (3)$$



> 图3 吊臂的受力示意图

图3是吊臂的受力示意图，后拉板轴力 F_t 沿竖直、水平方向分解后，因吊臂端部铰接点对吊臂中心轴线有偏心距，水平方向的分力在吊臂端部形成一个大小为 $F_t \cdot \cos \alpha \cdot z$ 的偏心弯矩， F_x 、 F_y 分别为吊臂根部铰点对整个吊臂水平、竖直方向的支反力。其表达式为：

$$F_x = F_t \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

$$F_y = q \cdot l_b - F_l - F_t \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

三、建立微分方程及求解吊臂挠曲线

以吊臂根部的铰点作为原点，水平方向为坐标轴 X 轴，向右为正，竖直方向为坐标轴 Y 轴，向下为正，构件直角坐标系，列出 x 在 $[0, l_c]$ 区间及 x 在 $[l_c, l_b]$ 区间内的非线性微分方程，如下：

$$EI y_1'' = \frac{1}{2} q x^2 - q l_b x - F_l \cdot \cos \alpha \cdot y_1 + F_l \cdot x + F_l \cdot \sin \alpha \cdot x \quad x \in [0, l_c] \quad (6)$$

$$EI y_2'' = \frac{1}{2} q x^2 - q l_b x - F_l \cdot \cos \alpha \cdot y_2 + F_l \cdot l_c + F_l \cdot \sin \alpha \cdot x \quad x \in [l_c, l_b] \quad (7)$$

边界条件为： $x=0$ ， $y_1=0$ ； $x=l_c$ ， $y_1=y_2$ ； $x=l_c$ ， $y_1'=y_2'$ ； $x=l_b$ ， $y_2=0$

其中

E 为吊臂所用材料的弹性模量；

I 为吊臂整体的转动惯量。

求解式(6)、式(7)两个微分方程，得到吊臂的挠曲线方程：

$$y_1 = \left(\frac{F_l \sin \epsilon l_c \cdot \cos \epsilon l_b}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{qEI(1 - \cos \epsilon l_b)}{(Ft \cos \alpha)^2 \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{0.5ql_b^2 - Ft \sin \alpha \cdot l_b - Ft l_c}{Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} - \frac{F_l \cdot \cos \epsilon l_c}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha} \right) \sin \epsilon x + \frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} \cos \epsilon x + \frac{0.5q}{Ft \cos \alpha} x^2 - \frac{q l_b - F_l - F_l \sin \alpha}{Ft \cos \alpha} x - \frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} \quad (8)$$

$$y_2 = \left(\frac{F_l \sin \epsilon l_c \cdot \cos \epsilon l_b}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{qEI(1 - \cos \epsilon l_b)}{(Ft \cos \alpha)^2 \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{0.5ql_b^2 - Ft \sin \alpha \cdot l_b - Ft l_c}{Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} \right) \sin \epsilon x + \left(\frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} - \frac{F_l \cdot \sin \epsilon l_c}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha} \right) \cos \epsilon x + \frac{0.5q}{Ft \cos \alpha} x^2 - \frac{q l_b - F_l \sin \alpha}{Ft \cos \alpha} x + \frac{F_l l_c}{Ft \cos \alpha} - \frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} \quad (9)$$

其中 $\epsilon = \sqrt{\frac{F_l \cos \alpha}{EI}}$ 为微分方程求解过程中的一个中间变量。

进一步得到腰绳和吊臂连接点 $x=l_c$ 处吊臂的挠度为：

$$y_c = \left(\frac{F_l \sin \epsilon l_c \cdot \cos \epsilon l_b}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{qEI(1 - \cos \epsilon l_b)}{(Ft \cos \alpha)^2 \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{0.5ql_b^2 - Ft \sin \alpha \cdot l_b - Ft l_c}{Ft \cos \alpha \cdot \sin \epsilon l_b} \right) \sin \epsilon l_c + \left(\frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} - \frac{F_l \cdot \sin \epsilon l_c}{\epsilon \cdot Ft \cos \alpha} \right) \cos \epsilon l_c + \frac{0.5q}{Ft \cos \alpha} l_c^2 - \frac{q l_b - F_l \sin \alpha - F_l l_c}{Ft \cos \alpha} l_c - \frac{qEI}{(Ft \cos \alpha)^2} \quad (10)$$

由式(1)、(2)、(3)可以得到以下关系：

$$\frac{F_l}{F_l \cos \alpha} = \frac{h - (u - y_c)}{t} - \frac{u - y_c - z}{l_b - l_c} \quad (11)$$

$$\frac{F_l \sin \alpha}{F_l \cos \alpha} = \frac{u - y_c - z}{l_b - l_c} \quad (12)$$

$$F_l \cos \alpha = \frac{0.5l_b^2 q t}{h l_c - (l_c - t)(u - y_c)} \quad (13)$$

将式(11)、(12)代入式(10)，并设 $p = F_l \cos \alpha$ ，得到式：

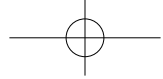
$$y_c = f_1(p) + f_2(p)(u - y_c) \quad (14)$$

式中 $f_1(p)$ 、 $f_2(p)$ 是关于 p 的两个函数：

$$f_1(p) = \left(\frac{A \cdot \sin \epsilon l_c \cdot \cos \epsilon l_b}{\epsilon \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{qEI(1 - \cos \epsilon l_b)}{p^2 \cdot \sin \epsilon l_b} + \frac{0.5ql_b^2 - C \cdot p \cdot l_b - A \cdot p \cdot l_c}{p \cdot \sin \epsilon l_b} \right) \sin \epsilon l_c + \left(\frac{qEI}{p^2} - \frac{A \cdot \sin \epsilon l_c}{\epsilon} \right) \cos \epsilon l_c + \frac{0.5q}{p} l_c^2 - \frac{q l_b - C \cdot p - A \cdot p \cdot l_c}{p} - \frac{qEI}{p^2} \quad (15)$$

$$f_2(p) = \left(\frac{B \cdot \sin \epsilon l_c \cdot \cos \epsilon l_b}{\epsilon \cdot \sin \epsilon l_b} - \frac{D \cdot l_b + B \cdot l_c}{\sin \epsilon l_b} \right) \sin \epsilon l_c - \frac{B \cdot \sin \epsilon l_c \cos \epsilon l_c - (D + B) l_c}{\epsilon} \quad (16)$$

上面两式中 $A = \frac{(l_b - l_c)h + tz}{t(l_b - l_c)}$ ； $B = -\frac{l_b - l_c + t}{t(l_b - l_c)}$ ； $C = -\frac{z}{l_b - l_c}$ ；



$$D = -\frac{1}{l_b - l_c}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{p}{EI}}$$

式(13)分母上两项 hl_c 、 $(l_c - t)(u - y_c)$ ，吊臂扳起时桅杆与吊臂之间的角度接近直角， l_c 与 t 的长度很相差很小，腰绳的长度要比吊臂上腰绳安装位置的挠度大得多；因此 hl_c 的值远大于 $(l_c - t)(u - y_c)$ 。可对式(13)分母项简化，去掉 y_c 得到 $p_o = \frac{0.5l_b^2qt}{hl_c - (l_c - t) \cdot u}$ ，对函数 $f_1(p)$ 、 $f_2(p)$ 分别在 p_o 点进行泰勒展开，可得到式(14)一阶泰勒展开式表达式：

$$y_c = f_1(p_o) + f_2(p_o)(u - y_c) + f_1'(p_o) \cdot (p - p_o) + f_2'(p_o) \cdot (p - p_o) \cdot (u - y_c) \quad (17)$$

$$f_1'(p_o) = 0.5 \frac{1}{p_o^3} (4EIq + 2l_b l_c p_o q - l_c^2 p_o q - Al_c p_o^2 \cos^2(l_c \varepsilon) + (EIl_b \varepsilon q \cot^2(l_b \varepsilon) + q(EI(l_b - l_c) \varepsilon - (4EI + l_b^2 p_o) \csc(l_b \varepsilon)) + \cot(l_b \varepsilon)(4EIq + l_b \varepsilon(Cl_b p_o^2 + Al_c p_o^2 - EIq - 0.5l_b^2 p_o q) \csc(l_b \varepsilon))) \sin(l_c \varepsilon) + Ap_o(l_c p_o - EI \varepsilon \cot(l_b \varepsilon) - l_b \csc^2(l_b \varepsilon)) \sin^2(l_c \varepsilon) + \cos(l_c \varepsilon)(-4EIq + l_c \varepsilon(EIq + 0.5l_b^2 p_o q - Cl_b p_o^2 - Al_c p_o^2) \csc(l_b \varepsilon) + \cot(l_b \varepsilon)(2Al_c p_o^2 \sin(l_c \varepsilon) - EIl_c \varepsilon q)) + 0.5AEI p_o \varepsilon \sin(2l_c \varepsilon)) \quad (18)$$

$$f_2'(p_o) = \frac{1}{4E^2 I^2 \varepsilon^{1.5}} (-2BEI l_c \varepsilon \cos^2(l_c \varepsilon) - 2l_c(Dl_b + Bl_c)p_o \cos(l_c \varepsilon) \csc(l_b \varepsilon) + BEI(2\varepsilon(l_c - l_b \csc^2(l_b \varepsilon)) \sin^2(l_c \varepsilon) + \sin(2l_c \varepsilon)) + 2 \cot(l_b \varepsilon)(l_b(Dl_b + Bl_c)p_o \csc(l_b \varepsilon) \sin(l_c \varepsilon) + BEI(l_c \varepsilon \sin(2l_c \varepsilon) - \sin^2(l_c \varepsilon))) \quad (19)$$

式(18)、(19)中 A 、 B 、 C 、 D 、 ε 与式(15)、(16)相同，分析式(17)第三、四项 $f_1'(p_o)(p - p_o)$ 、 $f_2'(p_o)(p - p_o)$ ，其中 p_o 与 p 只是在分母上相差一项 $(l_c - t)y_c$ ，由于吊臂上腰绳安装位置处的挠度很小，且 $f_1'(p_o)$ 、 $f_2'(p_o)$ 的表达式太复杂不利于工程应用，可忽略式(17)中第三项和第四项，得出吊臂在 $x = l_c$ 位置的简化后挠度公式：

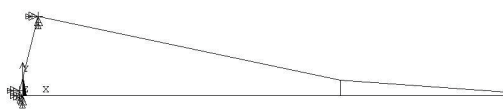
$$y_c = f_1(p_o) + f_2(p_o)(u - y_c) \quad (20)$$

进一步求出 y_c 的表达式：

$$y_c = \frac{f_1(p_o) + f_2(p_o) \cdot u}{1 + f_2(p_o)} \quad (21)$$

根据二阶理论对式(17)进行二次迭代，或者使用简化公式(21)，均可以求出吊臂上腰绳和吊臂连接点的挠度，式(17)较为复杂但精度高，而式(21)简单精度差一些。将该挠度 y_c 代入式(11)、(12)、(13)可得到吊臂上受的力 F_t 、 $F_t \sin \alpha$ 、 $F_t \cos \alpha$ 的值，把这些值代入公式(8)、(9)可以得到吊臂在 $x \in [0, l_c]$ 区域的挠曲线方程 y_1 和在 $x \in [0, l_b]$ 区域的挠曲线方程 y_2 ，进一步得出在腰绳长度为 u 时整个吊臂的挠曲线方程，最终得到吊臂在此时的受力状况。

4 工程应用及分析



>图4 带腰绳起臂工况有限元模型

选取某公司的250t履带式起重机的91m长主吊臂起臂工况的等效力学模型设计吊臂上腰绳装置。腰绳在吊臂上的铰接点在离吊臂根部60m处，起重机吊臂起臂时各尺寸参数数值如下： $h = 15m$ ， $t = 57m$ ， $l_b = 91m$ ， $l_c = 60m$ ， $Z = 0.8m$ 。将格构式主吊臂等效成实腹式，等效转动惯量为 $I = 0.0156m^4$ ，吊臂的均布载荷 $q = 1780.2N/m$ 。根据以上参数建立有限元模型，吊臂用 beam44 单元，定其截面积 $0.016m^2$ ，通过调整有限元模型中的材料密度数值，达到模拟真实吊臂自重的效果，腰绳及前、后拉板用 link10 单元，截面积为 $0.0018m^2$ 。边界条件：约束吊臂根部铰点除变幅平面内转动自由度以外的其它自由度，约束桅杆端部与拉板铰接处除转动自由度外的其它自由度。载荷包括吊臂自重及在 link10 单元中设置初始应变后在后拉板上产生的预紧力。求解过程中通过不断改变 link10 单元实常数不断调整初始应变值，直到吊臂端部节点的位移达到 $10^{-4}m$ 数量级。用此过程来得到吊臂受到前拉板拉力后起臂时的受力和位移。将有限元分析结果和公式(17)进行一次迭代后得到的腰绳安装位置处吊臂的挠度、后拉板及腰绳的内力对比，见表1。

表1 结果对比

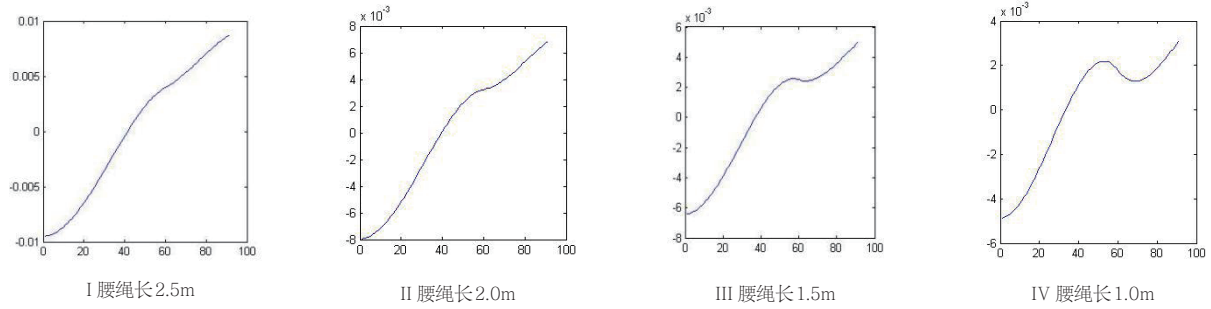
u (m)	$y_c(m)$			$F_g(N)$		
	有限元计算	公式(17)	公式(21)	有限元计算	公式(17)	公式(21)
4.5	-0.3810	-0.3801	-0.3816	481936	481880	481880
4	-0.3342	-0.3334	-0.3347	481916	481860	481860
3.5	-0.2875	-0.2868	-0.2880	481926	481870	481870
3	-0.2419	-0.2403	-0.2414	481965	481910	481910
2.5	-0.1945	-0.1941	-0.1950	482032	481970	481970
2	-0.1481	-0.1480	-0.1487	482126	482060	482060
1.5	-0.1019	-0.1021	-0.1026	482247	482180	482180
1	-0.0555	-0.0564	-0.0567	482395	482330	482330

续表1

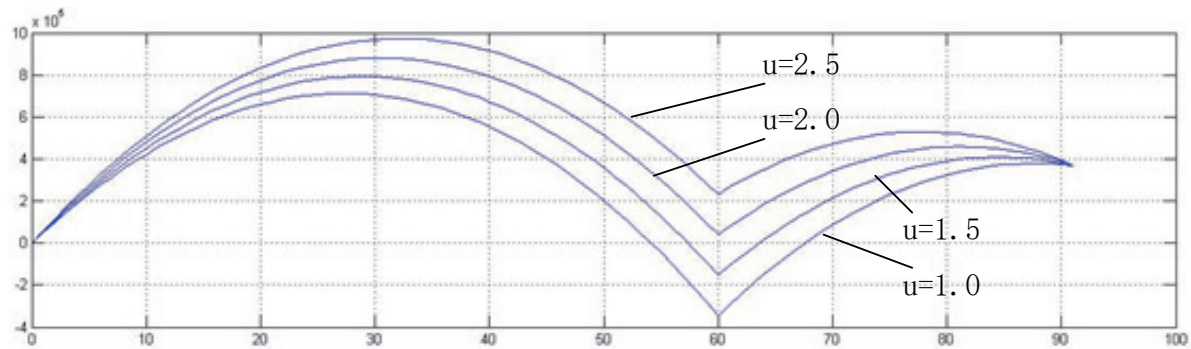
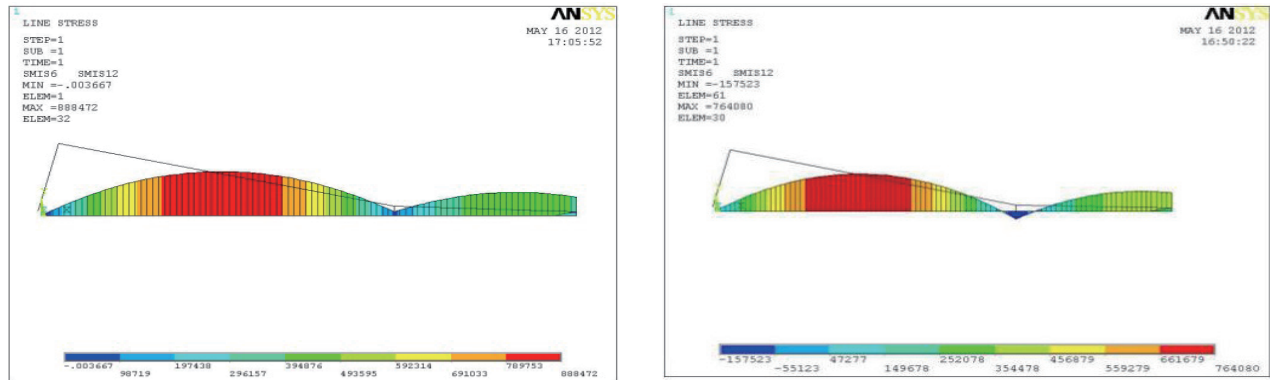
u(m)	$F_t(N)$			$F_1(N)$		
	有限元计算	公式(17)	公式(21)	有限元计算	公式(17)	公式(21)
4.5	475280	476040	476030	39755	39660	39690
4	473632	474620	474620	50410	50270	50300
3.5	472076	473310	473310	61017	60840	60870
3	470587	472100	472100	71582	71390	71420
2.5	469124	471000	471000	82107	81920	81940
2	467605	470000	470000	92594	92410	92430
1.5	465836	469100	469100	103040	102880	102890
1	463248	468310	468310	113431	113320	113320

本文方法计算的腰绳安装位置处吊臂的挠度和有限元软件分析计算结果有一定的误差，主要是由于本文假设吊臂变形后腰绳只是随着吊臂发生整体向下移动始终处于竖直的姿态以及对公式(14)泰勒展开后的简化造成的。根据两段拉板和腰绳的内力值求出个腰绳长度下的挠曲线方程，吊臂的S型反弯主要和挠曲线的斜率有关，分析各腰绳长度下挠曲线 y_1 、 y_2 的斜率变化。见图5。

根据图5曲线可看出在腰绳长为1.5m时 y_2 的斜率变化趋势为



>图5各腰绳长度下挠曲线 y_2 的斜率变化曲线



>图6 弯矩对比图

先变小后变大，在这个过程中挠曲线 y_2 的弯曲方向发生了变化，即发生了 S 型反弯；图6为有限元软件分析中得出的在腰绳长度分别为 2.0m、1.5m 时的弯矩图和使用本文方法计算得到的弯矩图（从上往下依次是腰绳长度为 2.5m、2.0m、1.5m、1.0m 时的弯矩曲线），分析发现在长度 1.5m 时吊臂上腰绳安装位置附近的弯矩发生了变向，这对吊臂的受力很不利，在长度 2.0m 时腰绳与吊臂连接点附近弯矩变小但是没有发生变向，而且吊臂受到的弯矩随着腰绳长度的减小而减小，最终选用 2.0m 长度的腰绳。

四、结论

本文提出的附加腰绳装置的长主臂起臂工况下吊臂的挠曲线方程求解方法及根据挠曲线方程判定吊臂在当前腰绳长度下是否发生 S 型反弯的方法，能较准确的判断各个腰绳长度下吊臂是否反弯，对基于起臂工况的腰绳设计具有实用价值。

参考文献

- [1] S.P. 铁摩辛柯著，张福范译. 弹性稳定理论 [M]. 北京：科学出版社，1965.
- [2] 陆念力，王佳，兰朋. 格构式构件整体稳定分析的等效惯性矩法 [J]. 建筑机械 2008.08 上半月刊：79-84.
- [3] 王欣，张静，郑亚辉，高顺德. 基于 ANSYS 的等截面吊臂腰绳优化 [C]. 第 18 届全国结构工程学术会议论文集第 III 册，2009：459-466.
- [4] 陆念力，罗冰，夏拥军. 基于二阶理论的 2 端弹性约束压弯梁的稳定性分析和最大弯矩计算 [J]. 起重运输机械，2009(5)：8-11.
- [5] 陆念力，夏拥军，兰朋. 弹性约束悬臂压弯梁的稳定性分析和最大二阶弯矩 [J]. 起重运输机械，2006(10)：11-13.
- [6] 中华人民共和国国家标准 GB/T 3811-2008 起重机设计规范 [S]. 北京：中国标准出版社，2008.
- [7] 顾迪民. 工程起重机 [M]. 北京：中国建筑工业出版社，1986.
- [8] 夏拥军，王腾飞，张宏生. 腰绳装置对起重机吊臂起重平面外稳定性的影响 [J]. 工程设计学报，2015,(第 4 期).
- [9] 谭群燕，高建桥，上官林建. 腰绳对风电起重机吊臂安全稳定性的影响 [J]. 机械工程师，2019,(第 10 期).
- [10] 王小燕. 履带起重机吊臂金属结构应力仿真与试验研究 [J]. 起重运输机械，2021,(第 15 期).